



Matematyczne Pojedynki

4. Pojedynek 2022 — Zadania 1-7

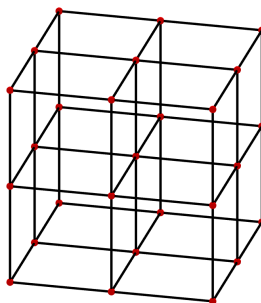


ZADANIE 1. „Królewna Śnieżka i 7 lewych butów”

Krasnoludki wrzuciły buty do skrzynki. Śnieżka wie, że jest tam 7 butów lewych, a szansa na to, że wyciągną dwa buty będą to prawy i lewy wynosi $\frac{35}{66}$. Ile jest w skrzynce butów prawych?

ZADANIE 2. „Sześciany z zapalek”

Dziewczynka z zapalkami budowała sześciany z zapalek w taki sposób, że do danego sześcianu dołączała kolejne zapalki tworząc większe sześciany. Sześcian $1 \times 1 \times 1$ składa się z 12 zapalek, a $2 \times 2 \times 2$ z 54 zapalek. Sześcian zawiera w środku zapalki tak, że tworzą one mniejsze sześciany $1 \times 1 \times 1$ (patrz rysunek poniżej). Z ilu zapalek składa się sześcian $5 \times 5 \times 5$?



Schemat budowy sześcianu z zapalek. Wersja o krawędzi długości 2 zapalek.

ZADANIE 3. „Przekątna dwunastokąta”

Jaką długość ma najdłuższa przekątna dwunastokąta foremego o boku 1?

ZADANIE 4. „Walec i Kula”

W kulę o promieniu 1 wpisano walec o największej możliwej objętości. Jakie jest pole przekroju osiowego tego walca?

ZADANIE 5. „Ciąg Donalda”

Kaczor Donald wymyślił pewien ciąg liczbowy zadany rekurencją w następujący sposób: $a_1 = 1$ oraz $a_n = n^{a_{n-1}}$. Jaka jest cyfra jedności liczby a_{2022} ?

ZADANIE 6. „Promień bezwzględny”

W wielokąt opisany nierównościami: $y \leq |x - 1| - |x + 1|$, $x \geq |y - 1| - |y + 1|$, $y \geq x$, wpisano okrąg. Jaka jest długość promienia tego okręgu?

ZADANIE 7. „Mały Książę”

Mały Książę wyrusza z domu i chce odwiedzić trójkę swoich przyjaciół: pilota, lisa i różę, każdego po 2 razy. Po każdym odwiedzinach zawsze wraca na chwilę do domu by uzupełnić zapasy prowiantu. Na ile sposobów może wybrać kolejność odwiedzin znajomych? Dopuszczalne jest, żeby odwiedził tę samą postać dwa razy z rzędu.