



Matematyczne Pojedynki 2. Pojedynki 2022 — Zadania 1-7



ZADANIE 1. „6 dzielników”

Ile jest liczb naturalnych, mniejszych od 100, które mają dokładnie 6 dzielników?

ZADANIE 2. „Nieskończona suma sinusów”

Ile wynosi suma rozwiązań poniższego równania w zbiorze $[0, 2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$?

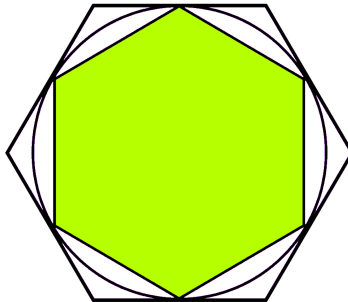
$$\sin(x) + \sin^2(x) + \sin^3(x) + \sin^4(x) + \dots = 1$$

ZADANIE 3. „Minikalkulator”

Mały Jasiu bawił się trzema plastikowymi cyframi: 1, 2 i 3, oraz drewnianymi znakami działań: dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia – każde po dwie sztuki (razem osiem drewnianych elementów). Miał układankę, w której było 5 wolnych miejsc na umieszczenie elementów. Miejsca: pierwsze, trzecie i piąte, pozwalały umieścić po jednej plastikowej cyferce, natomiast miejsca: drugie i czwarte, po jednym drewnianym znaku działania. Dla kolejnych liczb naturalnych, Jasiu sprawdzał, czy może uzyskać ją jako wynik działania układanki z wypełnionymi wszystkimi pięcioma miejscami. Jeżeli dało się uzyskać jakąś liczbę, to zapisywał ją w notatniku. Jaka jest suma wszystkich różnych zapisanych przez niego liczb?

ZADANIE 4. „Sześciokąt w sześciokącie”

W sześciokąt foremny o boku 1 wpisano okrąg, a w ten okrąg wpisano sześciokąt foremny. Jaka jest różnica pól między tymi sześciokątami?



ZADANIE 5. „Nowe szaty cesarza”

Cesarz potrzebuje nowej szaty na każdy dzień roku. Oprócz codziennej szaty, potrzebuje kolejnej nowej szaty na audiencję, która odbywa się zawsze, gdy dany dzień to niedziela lub pierwszy dzień miesiąca. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba nowych szat, które powinien przygotować w ciągu jednego roku krawiec dla cesarza?

ZADANIE 6. „Napis Baby Jagi”

Baba Jaga piecze duże piernikowe litery polskiego alfabetu (32 litery) tak, że każde dwie różne litery alfabetu mają inną wagę wyrażoną w całkowitej liczbie gramów. Co więcej, każda z nich waży co najwyżej 64g. Ciężar tych samych liter alfabetu jest zawsze taki sam. Baba Jaga chce przyozdobić napisem „BABA JAGA” wejście do swojej piernikowej chaty. Ile maksymalnie gramów mogą ważyć łącznie piernikowe litery w tym napisie?

ZADANIE 7. „Liczby dwu-drugie”

Liczbą drugą nazywamy liczbę naturalną, która jest iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych, a liczbą dwu-drugą nazywamy liczbę naturalną, która jest iloczynem dwóch różnych liczb drugich. Ile jest liczb dwu-drugich mniejszych niż 222?