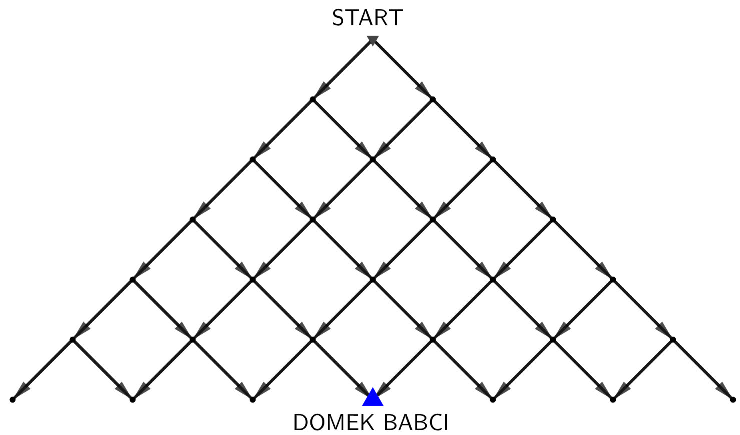
Matematyczne Pojedynki
Eliminacje 2022 — Zadania 1-14

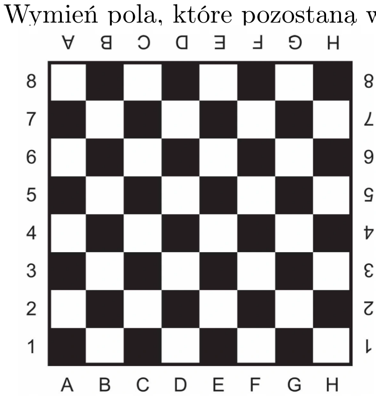
Link do ankiety: https://forms.gle/XUffVHtWtrTTbSF38

Zadanie 1. „Drogi do babci”
Czerwony Kapturek chce dotrzeć do babci, która mieszka w środku lasu (patrz rysunek poniżej). Las składa się ze ścieżek i rozstajów. Kapturek boi się chodzić poza ścieżkami ze względu na wilka. Na ile sposobów Kapturek może pójść do domku babci, jeśli idzie najkrótszą możliwą drogą po ścieżkach?



Zadanie 2. „Odejmowanie iloczynu królewicza”
Królewicz wybiera dwie cyfry i od liczby dwucyfrowej, którą z nich układa, odejmuje ich iloczyn. Na przykład, jeśli wybierze 7 i 5, to może otrzymać $75 - 35 = 40$. Jaka jest największa liczba, która może być wynikiem takiego działania?

Zadanie 3. „Guziki na szachownicy”
Pole A1 na szachownicy oznacza pole na przecięciu kolumny A oraz wiersza 1. Przyjmijmy następującą kolejność pól A1, A2, ..., A7, A8, B1, B2, ..., H7, H8, A1, A2, ... Kuba Guzik kładzie na szachownicy guzik na co siódmym polu zaczynając od A7, później B6 i tak dalej. Wymień pola, które pozostaną wolne po umieszczeniu 63 guzików.



Zadanie 4. „Orzeł czy Reszka?”
Królewna Śnieżka i siedmiu krasnoludków ustalili dziś podział jutrzejszych obowiązków domowych za pomocą rzutu monetą. Każdy (i krasnoludki, i Śnieżka) jednokrotnie rzucają własną standardową symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Śmieszek i Śpioszek wyrzucili orła, jeżeli wiemy, że Śnieżka wyrzuciła reszkę?

Zadanie 5. „Warstwy”
Ogry i cebula mają warstwy. Warstwy ma również tort. Jaką wysokość w centymetrach ma dziewiąta warstwa tortu, w którym każda kolejna warstwa jest dwa razy wyższa od poprzedniej, a pierwsza ma 0,5cm wysokości?

Zadanie 6. „Prawie pierwsza”
Jaka jest najmniejsza nieparzysta liczba, której dokładnie cztery dzielniki są liczbami pierwszymi?

Zadanie 7. „Śpiąca królewna”

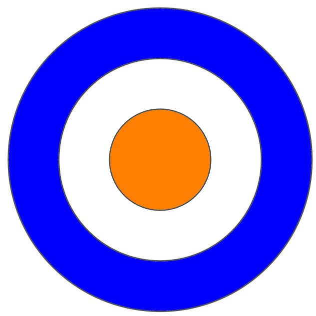
Śpiąca królewna zasnęła na dokładnie sto lat. Dziesięć lat temu minęło dokładnie tyle lat od momentu zaśnięcia, ile zostało od teraz do jej obudzenia. Ile lat już przespała królewna?

Zadanie 8. „Punkty kratowe”

Dany jest ośmiokąt o wierzchołkach $(\pm 1; \pm 2)$; $(\pm 2; \pm 1)$. Podać liczbę półprostych wychodzących z punktu $(0; 0)$, które trafiają na punkt kratowy (tzn. punkt o obu współrzędnych całkowitych) różny od punktu $(0; 0)$ i znajdujący się w ośmiokącie (lub na jego brzegu).

Zadanie 9. „Celność Mulan”

Na niebieskiej tarczy w kształcie koła o promieniu 3cm doczepiono najpierw jedno mniejsze koło w kolorze białym o tym samym środku i promieniu 2cm. Następnie doczepiono kolejne koło o tym samym środku i promieniu 1cm, tym razem w kolorze pomarańczowym (patrz rysunek poniżej). Tak przygotowana tarcza w trzech kolorach miała następującą punktację – pole niebieskie: 8 punktów, pole białe: 9 punktów, pole pomarańczowe: 10 punktów. Mulan, aby wygrać zawody, musi zdobyć w trzech strzałach przynajmniej 28 punktów, a przy każdym strzale trafia w tarczę z prawdopodobieństwem 90%. Szansa trafienia w dany obszar tarczy jest wprost proporcjonalna do jego powierzchni. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Mulan wygra zawody?



Zadanie 10. „Smoki”

W pewnym królestwie smoki mają albo dwie głowy, albo trzy głowy i są albo zielone, albo czerwone. Smoków o dwóch głowach jest dokładnie trzy razy więcej niż smoków o trzech głowach, a smoki czerwone to dokładnie $\frac{3}{10}$ wszystkich smoków. Ponadto 90% smoków o trzech głowach to smoki czerwone. Szewczyk wie, że smok czekający na niego w jamie jest czerwony. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ten smok ma trzy głowy?

Zadanie 11. „Dwa do potęgi”

Jakie jest najmniejsze możliwe rzeczywiste rozwiązanie poniższego równania?

$$2^x + 4^x = 8^x$$

Zadanie 12. „Rybka Nemo”

Rybka Nemo już niedługo (w roku 2024) zacznie uczęszczać do szkoły dla rybek. W tej szkole Nemo będzie się uczył przez 9 miesięcy, od stycznia do września, od poniedziałku do czwartku, lecz tylko w parzyste dni miesiąca. Przez ile dni Nemo będzie pływał do szkoły w 2024 roku, jeśli wiadomo, że 01.01.2024 to poniedziałek? Rybki używają kalendarza gregoriańskiego.

Zadanie 13. „Podzielny przez 7”

Podaj, w systemie dziesiętnym, najmniejszą liczbę podzielną przez 7, która w systemie ósemkowym składa się tylko z cyfr 5 i 6.

Zadanie 14. „Wektory”

Jaki jest sinus kąta ostrego, który tworzą wektory $\vec{v}_1 = [1; 3]$ $\vec{v}_2 = [3; 1]$?

Rektor Politechniki Wrocławskiej
prof. dr hab. inż. Arkadiusz Wójs

Dziekan Wydziału Matematyki
prof. dr hab. inż. Marcin Magdziarz